

Fraktionale Modellierung und Parametrierung von technischen Spulen

M.Sc. Tareq Abuaisha, Prof. Dr.-Ing. Jana Kertzsch
Institut für Elektrotechnik, TU Bergakademie Freiberg

1 Einleitung

Die genaue Abbildung des Verhaltens von technischen Spulen über einen weiten Frequenzbereich ist für eine präzise Modellierung von technischen Maschinen notwendig. Technische Spulen mit einem ferromagnetischen Kern zeigen andere Eigenschaften als ideale Spulen [1, 2]. Dies ist auf die Wirbelstromverluste, Hystereseverluste und ab einem bestimmten Frequenzbereich auftretenden Skineffektverlusten zurückzuführen.

In diesem Beitrag werden zwei Verfahren der Modellierung von technischen Spulen, das klassische Modell und das fraktionale Modell, miteinander verglichen. Für beide Modelle werden die Parameter anhand der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (MKQ) identifiziert. Die gewonnenen Ergebnisse werden an Messungen validiert. Im Falle des fraktionalen Modells können die Parameter nicht direkt gemessen werden. Deshalb wird im Beitrag eine Möglichkeit der Systemanalyse dargestellt, diese Parameter aus den Parametern des klassischen Modells abzuleiten.

2 Grundlagen der fraktionalen Modellierung

Im Allgemeinen hat ein fraktionaler Operator die Notation ${}_a D_t^\alpha f(t)$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine nicht-ganzzahlige differentielle bzw. integrale Ordnung ist. a und $t \in \mathbb{R}$ sind die untere und obere Grenze des Operators und $f(t)$ die Funktion, auf die der Operator angewendet wird [3]. In ihrer einfachsten Form wird der fraktionale Operator ohne Grenzen geschrieben, d.h. $D^\alpha f(t)$, was dann bedeutet, dass die untere Grenze $a = 0$ und die obere Grenze t die unabhängige Variable sind.

Es ist langwierig, die fraktionalen Differentialgleichungen (FDGL) im Zeitbereich zu lösen, stattdessen können sie im Frequenzbereich mit Laplace- oder Fourier-Transformation

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} D^\alpha f(t) dt = s^\alpha F(s) \quad (1)$$

$$\mathcal{F}\{D^\alpha f(t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-j\omega t} D^\alpha f(t) dt = (j\omega)^\alpha F(j\omega) \quad (2)$$

gelöst werden. Die Anfangsbedingungen sind in Gl. (1) mit Null gewählt [4]. Fast alle numerischen Berechnungen von FDGL in diesem Beitrag werden im Frequenzbereich mit Fourier-Transformation durchgeführt.

3 Modellierung einer technischen Spule

Um eine technische Spule effizient zu modellieren, müssen alle Arten von Verlusten die auftreten können, berücksichtigt werden. Wie in Abb. 1 dargestellt, ordnet man ihnen entsprechende Grundelemente zu. Die ohmschen Verluste werden durch den Kupferverlustwiderstand der Wicklungen R_{Cu} dargestellt, der in Reihe zu der idealen Induktivität L verschaltet ist. Die gesamten Kernverluste, die aus Hysterese-, Wirbelstrom- und zusätzlichen anomalen Verlusten bestehen, führen zur Erwärmung des Kernmaterials. Kernverluste werden in der Regel durch einen Kernverlustwiderstand R_C [2] oder aber, durch einen Widerstand R_C in Reihe zu einer Induktivität L_C verschaltet [5], dargestellt. Treten Frequenzen auf, die nahe der Eigenresonanzfrequenz f_0 sind (ca. eine Dekade entfernt), muss man die parasitäre Kapazität C_p berücksichtigen, die sich auf die Gesamtimpedanz der Spule auswirkt.

Infolgedessen wird zur Modellierung technischer Spulen auf Grundlage der erforderlichen Genauigkeit sowie des verwendeten Frequenzbereichs eines der klassischen Ersatzschaltbilder (ESB) unter den in Abb. 1 angegebenen, ausgewählt [2].

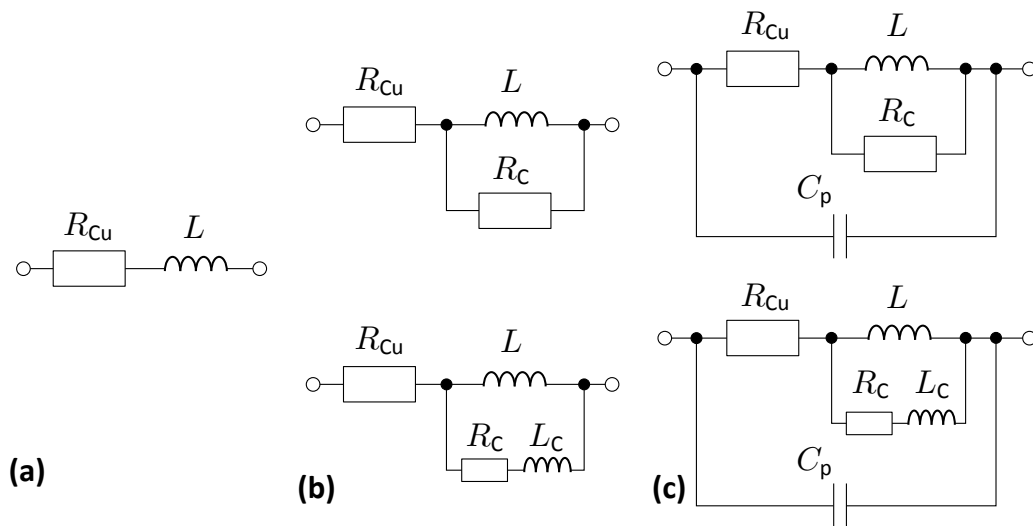


Abbildung 1: Klassische Modellierung einer technischen Spule

(a) mit einem Kupferverlustwiderstand

(b) mit einem zusätzlichen Kernverlust- Widerstand bzw. Scheinwiderstand

(c) mit einer parasitären Kapazität C_p (erforderlich wenn $f > f_0/10$).

Für den Fall der fraktionalen Modellierung einer technischen Spule wird das gleiche Prinzip wie bei der klassischen Modellierung verwendet. Allerdings ist der Kernverlustwiderstand R_C nicht mehr Teil des Ersatzschaltbildes. Stattdessen spiegelt die Ordnung der fraktionalen Ableitung α die Menge der Kernverluste innerhalb der Spule wider. Eine Ordnung in der Nähe von eins entspricht kleinen Kernverlusten. Je stärker die Ordnung gegen Null geht, desto größer werden die Kernverluste.

Wie bei der klassischen Modellierung muss bei Frequenzen nahe der Eigenresonanzfrequenz f_0 die fraktionale parasitäre Kapazität C_β im Ersatzschaltbild enthalten sein. Abb. 2 zeigt die

verschiedenen fraktionalen Modelle, je nach erforderlicher Genauigkeit und verwendetem Frequenzbereich.

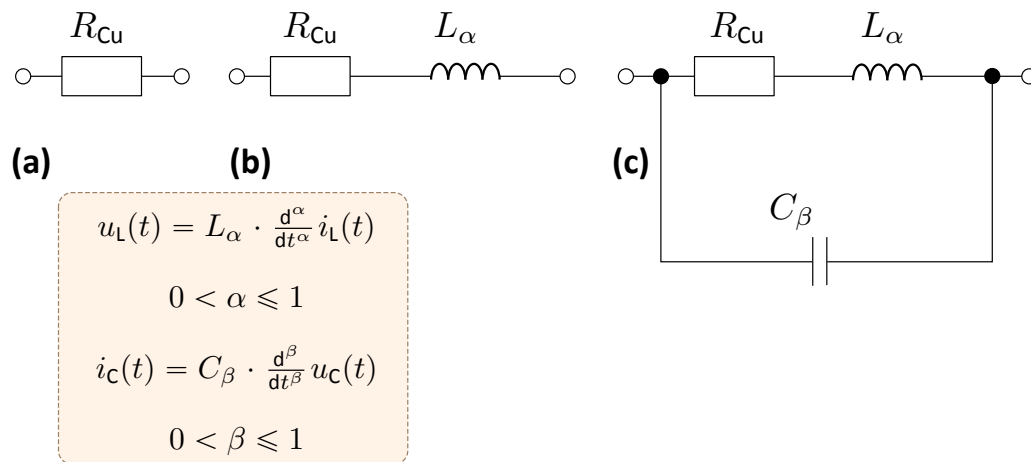


Abbildung 2: Fraktionale Modellierung einer technischen Spule

(a) anwendbar wenn $\omega L \ll R_{Cu}$

(b) mit einem Kupferverlustwiderstand

(c) mit einer zusätzlichen fraktionalen parasitären Kapazität C_β .

Die unbekannten Parameter des gewünschten Ersatzschaltbildes werden mit Hilfe der MKQ gewonnen.

4 Parameteridentifikation

4.1 Methodik

Die Bestimmung der Ersatzschaltbild-Parameter

- R_{Cu}, R_C, L, C_p für das klassische Modell gemäß Abb. 1c
- $R_{Cu}, L_\alpha, C_\beta, \alpha, \beta$ für das fraktionale Modell gemäß Abb. 2c

ist in Abb. 3 dargestellt und wird im Folgenden näher beschrieben.

Im Schritt (1) werden gemäß der Versuchsanordnung, s. Abschnitt 4.3, die Eingangsspannung $u(t)$ und die Ausgangsspannung $u_{RM}(t)$ gemessen und im Schritt (2) mit Hilfe der DFT¹ in den Frequenzbereich gewandelt. Es entstehen $\underline{U}(j\omega)$ bzw. $\underline{U}_{RM}(j\omega)$. Beispielsweise zeigt Abb. 4 das Frequenzspektrum der Eingangs- und Ausgangsspannungen für eine einzelne Messung bei einer Frequenz von 100 Hz.

Im Schritt (3) kann dann die Impedanz $\underline{Z}_L(j\omega)_{\text{meas}}$ im Frequenzbereich nach

$$\underline{Z}_L(j\omega)_{\text{meas}} = \frac{\underline{U}(j\omega)}{\underline{I}(j\omega)} - R_M = \frac{R_M \cdot \underline{U}(j\omega)}{\underline{U}_{RM}(j\omega)} - R_M \quad (3)$$

¹mit Matlab-Funktion *fft* realisiert

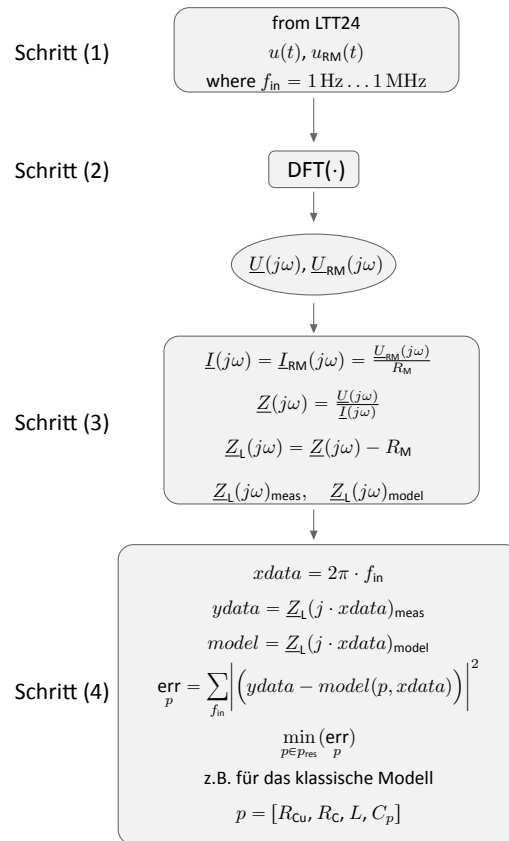


Abbildung 3: Schema zur Identifizierung der unbekannten Parameter der Modelle.

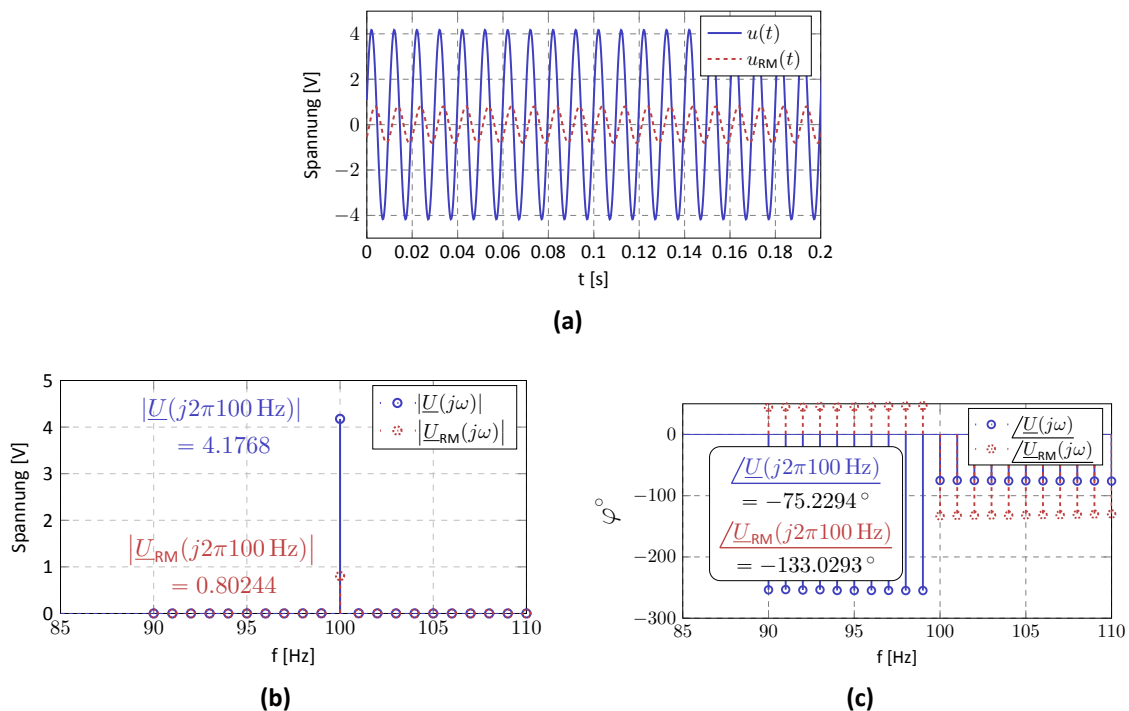


Abbildung 4: Umwandlung der resultierenden Messungen von LTT24 mit DFT in Frequenzbereich
 (a) $u(t)$ und $u_{RM}(t)$ bei einer Frequenz von 100 Hz
 (b) und (c) Amplitude und Phasenspektrum von Eingangs- und Ausgangssignalen.

berechnet werden. Im Falle einer Speisefrequenz von 100 Hz ergibt sich die Impedanz der Versuchsspule zu $\underline{Z}_L(j\omega)_{\text{meas}} = 31.39 \Omega + j77.96 \Omega$, was $R_{\text{Cu}} = 31.39 \Omega$ und $L = 124.1 \text{ mH}$ entspricht.

Schließlich werden im Schritt (4) die unbekannten Parameter des Modells mit der MKQ² identifiziert. Eingangsvektoren für die MKQ sind $\underline{Z}_L(j\omega)_{\text{meas}}$ und $\underline{Z}_L(j\omega)_{\text{model}}$ entsprechend des verwendeten Ersatzschaltbildes.

4.2 Validierung der Identifikationsergebnisse

4.2.1 Klassisches Modell

Die Validierung der identifizierten Ersatzschaltbild-Parameter für das klassische Modell erfolgt durch

- den Vergleich mit den gemessenen Parametern R_{Cu} , L , C_p bei einer Messfrequenz von 50 Hz.
- den Vergleich der gemessenen Impedanz, s. Gl. (3), mit der aus den identifizierten Parametern hochgerechneten Impedanz.

Der Vergleich der Impedanzen wurde über den gesamten Frequenzbereich erstellt.

4.2.2 Fraktionales Modell

Im Falle des fraktionales Modelles ist die Messung der Parameter L_α , C_β , α , β nicht möglich. Deshalb wird der folgende Weg vorgeschlagen. Nach [6] kann man die fraktionale Induktivität L_α mit der Maßeinheit $[\text{H}^* = \text{Vs}^\alpha \text{A}^{-1}]$ durch

$$L_\alpha = \frac{L}{\sigma_L^{(1-\alpha)}} \quad (4)$$

darstellen. In Analogie dazu kann man die fraktionale Kapazität C_β mit der Maßeinheit $[\text{F}^* = \text{As}^\beta \text{V}^{-1}]$ durch

$$C_\beta = \frac{C}{\sigma_C^{(1-\beta)}} \quad (5)$$

darstellen. Durch die Einführung des Prinzips des Thévenin-Äquivalentwiderstandes eines RL-Gliedes $R_{\text{TH}, L}$ als auch eines RC-Gliedes $R_{\text{TH}, C}$

$$\begin{aligned} R_{\text{TH}, L} &= R_M + \frac{R_{\text{Cu}} \cdot R_C}{R_{\text{Cu}} + R_C} \\ R_{\text{TH}, C} &= \frac{R_M \cdot (R_{\text{Cu}} + R_C)}{R_M + R_{\text{Cu}} + R_C} \end{aligned} \quad (6)$$

²Matlab: *Nelder-Mead Simplex Algorithmus* vergleichend zu Maple: *Levenberg-Marquardt Algorithmus*

kann man die Koeffizienten der jeweiligen Zeitkonstanten nach

$$\begin{aligned}\tau_{RL} &= \frac{L}{R_{TH,L}} \\ \tau_{RL\alpha} &= \frac{L_\alpha}{R_{Cu} + R_M} \\ \tau_{RC} &= C \cdot R_{TH,C} \\ \tau_{RC\beta} &= C_\beta \cdot \frac{R_{Cu} \cdot R_M}{R_{Cu} + R_M}\end{aligned}\quad (7)$$

bestimmen. Infolgedessen ergeben sich die Unbekannten $\sigma_L^{(1-\alpha)}$ bzw. $\sigma_C^{(1-\beta)}$ zu

$$\begin{aligned}\sigma_L^{(1-\alpha)} &= \frac{\tau_{RL}}{\tau_{RL\alpha}} = \frac{f_{C\alpha}}{f_{C,KI}} \\ \sigma_C^{(1-\beta)} &= \frac{\tau_{RC}}{\tau_{RC\beta}} = \frac{f_{C\beta}}{f_{C,KI}}.\end{aligned}\quad (8)$$

Zur Berechnung der Grenzfrequenz des klassischen Modells $f_{C,KI}$ bildet man die komplexe Übertragungsfunktion des klassischen Modells $G_{KI}(j\omega)$. Bei $1/\sqrt{2}$ der Amplitude der Übertragungsfunktion erhält man, s. Abb. 5a, die dazugehörige Grenzfrequenz:

$$G_{KI}(j\omega_C) = \frac{1}{\sqrt{2}} \max(|G_{KI}(j\omega)|). \quad (9)$$

In Analogie zur „klassischen“ Grenzfrequenz $f_{C,KI}$, kann man die Grenzfrequenz des fraktionalen Modells $f_{C,Fr}$ aus der komplexen Übertragungsfunktion des fraktionalen Modells $G_{Fr}(j\omega)$, s. Abb. 5b, nach

$$G_{Fr}(j\omega_C) = \frac{1}{\sqrt{2}} \max(|G_{Fr}(j\omega)|) \quad (10)$$

bestimmen. Die fraktionalen Grenzfrequenzen werden nach

$$\begin{aligned}f_{C\alpha} &= (f_{C,Fr})^\alpha && \text{für ESB nach Abb. 2b} \\ f_{C\beta} &= (f_{C,Fr})^\beta && \text{für ESB nach Abb. 2c}\end{aligned}\quad (11)$$

berechnet. Die Ordnungen der fraktionalen Ableitungen α und β können nur im Zusammenhang mit L_α bzw. C_β validiert werden.

4.3 Versuchsaufbau

Zur Beurteilung der klassischen und fraktionalen Modelle wurde der Versuchsaufbau, s. Abb. 6, verwendet.

Der Funktionsgenerator erzeugt ein sinusförmiges Eingangssignal $u(t) = A_{in} \cdot \sin(2\pi f_{in} t + \varphi_{in})$, mit $1 \text{ Hz} \leq f_{in} \leq 1 \text{ MHz}$ und konstanter Amplitude A_{in} . Im Falle eines linearen Systems ist das Ausgangssignal $u_{RM}(t) = A_{out} \cdot \sin(2\pi f_{in} t + \varphi_{out})$ auch eine sinusförmige Spannung mit derselben Frequenz wie das Eingangssignal f_{in} , jedoch mit unterschiedlichen Amplitude und Phase. Eingangs- und Ausgangssignale werden im Zeitbereich mit einer Abtastfrequenz $f_a =$

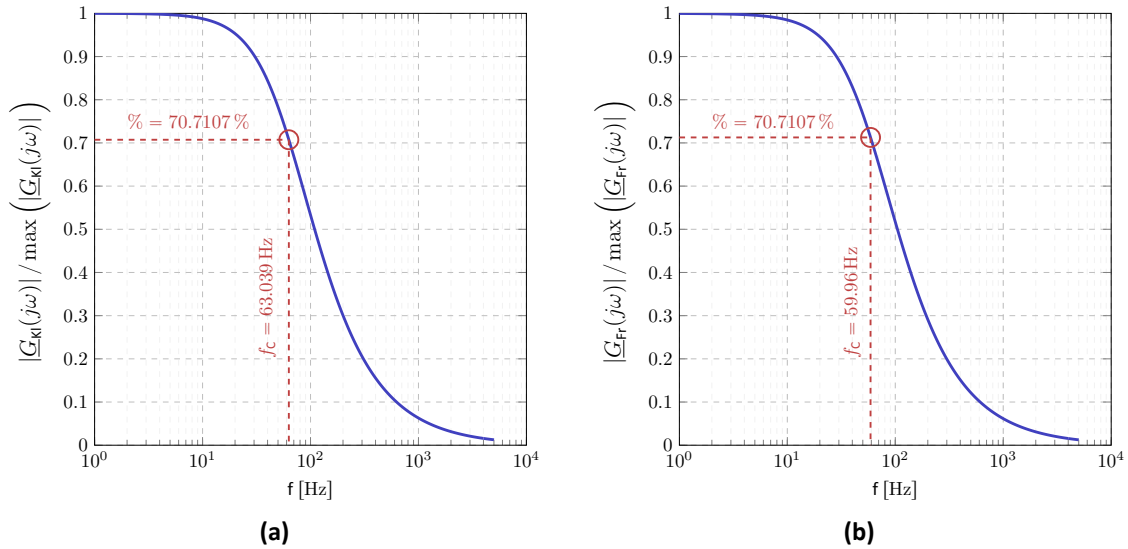


Abbildung 5: Die normierten Amplitudenspektren zur Bestimmung der Grenzfrequenz f_c

(a) klassisches Modell

(b) fraktionales Modell

4 MHz mit Hilfe des HGMS LTT24 gemessen.

Dem Versuchsaufbau liegt das Ersatzschaltbild, s. Abb. 7 zu Grunde.

5 Versuchsergebnisse

Zur Beurteilung der klassischen und fraktionalen Modelle einerseits, sowie der vorgeschlagenen Methodik der effizienten Modellierung einer technischen Spule andererseits, wurde eine Ringspule mit einem austauschbaren Kern, s. Abb. 8, in einem breiten Frequenzband (etwa 650 Messungen) untersucht.

Anhand des im Abschnitt 4.3 dargestellten Versuchsaufbaus wurden folgende Versuche durchgeführt:

- Luftspule, Ersatzschaltbild s. Abb. 1c, Eingangsfrequenz: $1 \text{ Hz} \leq f_{in} \leq 1 \text{ MHz}$
- Kupferkernspule, Ersatzschaltbild s. Abb. 1c, Eingangsfrequenz: $1 \text{ Hz} \leq f_{in} \leq 1 \text{ MHz}$
- Eisenkernspule, Ersatzschaltbild s. Abb. 1b, Eingangsfrequenz: $1 \text{ Hz} \leq f_{in} \leq 10 \text{ kHz}$

Zur Abschätzung der Abweichung zwischen berechneter und gemessener Impedanz wurde der relative mittlere quadratische Fehler (NRMSE)

$$\text{NRMSE} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\chi_{\text{measurement}} - \chi_{\text{model}} \right)^2}}{\sum_{i=1}^n |\chi_{\text{model}}|} \cdot 100 \quad [\%], \quad (12)$$

verwendet. Hier ist n die Anzahl der Messpunkte und χ der Wert der komplexen Impedanz $\underline{Z}_L(j\omega_{in})$ an der jeweiligen Eingangsfrequenz f_{in} .

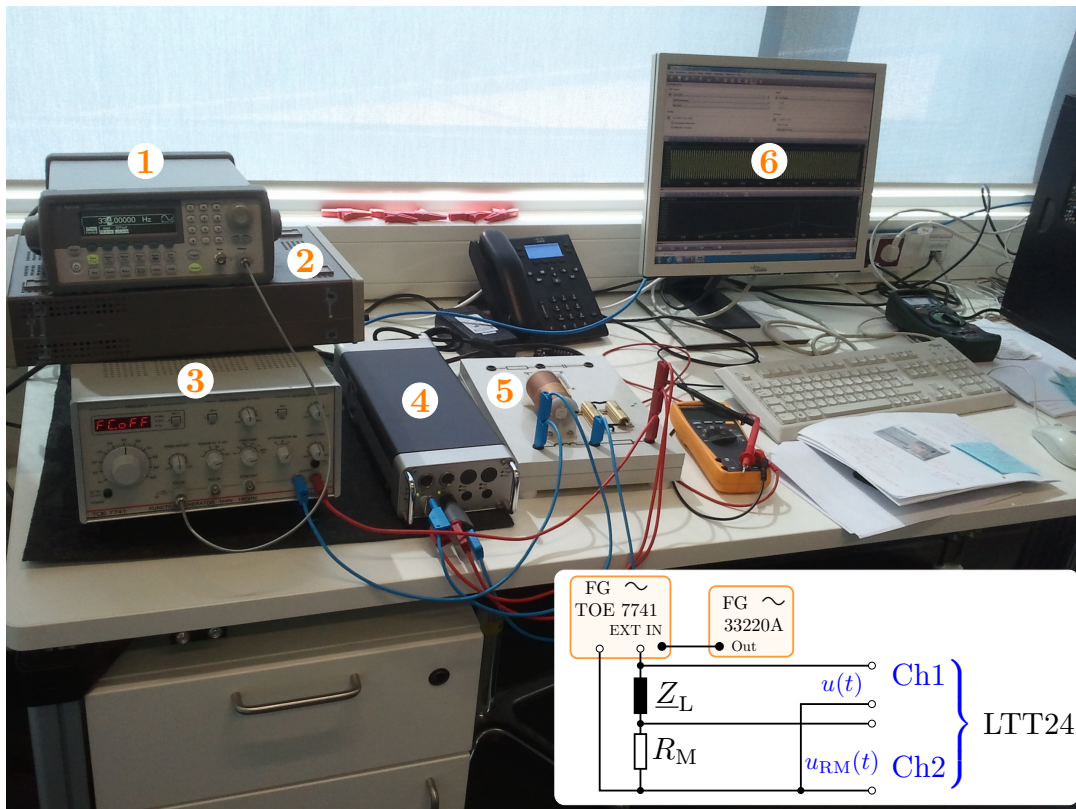


Abbildung 6: Versuchsaufbau bestehend aus:

- 1) Function/Arbitrary waveform generator 33220A, 20 MHz
- 2) LC-Meter HM8018
- 3) Funktionsgenerator TOE 7741 (als Leistungsverstärker verwendet)
- 4) Hochgeschwindigkeitsmesssystem (HGMS) LTT24
- 5) RL-Glied mit $R_M = 17.701 \Omega$ und L als Versuchsobjekt
- 6) Software LTTpro (Benutzeroberfläche für LTT24)

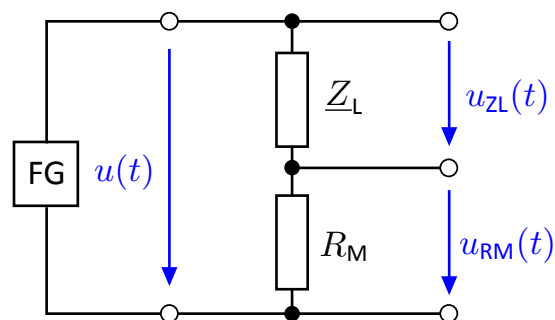


Abbildung 7: Ersatzschaltbild des Versuchsaufbaus nach Abb. 1 und Abb. 2

NRMSE wird separat für den Real- und Imaginärteil und den Absolutwert nach Gl. (12) berechnet, wobei der in den Tabellen angegebener Wert dem Mittelwert der drei Abweichungen entspricht. Da der Imaginärteil der Impedanz negative Werte annehmen kann, wurde der Absolutwert im Nenner verwendet.



Abbildung 8: Technische Ringspule mit austauschbarem Kern: Luft, Kupfer und Eisen. $L_{\text{luft}} = 125 \text{ mH}$ und $R_{\text{Cu}} = 30 \Omega$, wobei die Anzahl der Wicklungen und Durchmesser des Kupferdrahtes 1500 und 0.5 mm entsprechen.

5.1 Luftspule

Die unbekannten Parameter wurden nach der in Abschnitt 4.1 dargestellten Methode identifiziert und sind in Tabelle 1 dargestellt. Gegenübergestellt wurden beim klassischen Modell die Messungen, beim fraktionalen Modell die nach Abschnitt 4.2.2 ermittelten Parameter.

In Abb. 9 wurden die gemessenen Impedanzen den aus den Parametern hochgerechneten Impedanzen über den kompletten Frequenzbereich dargestellt.

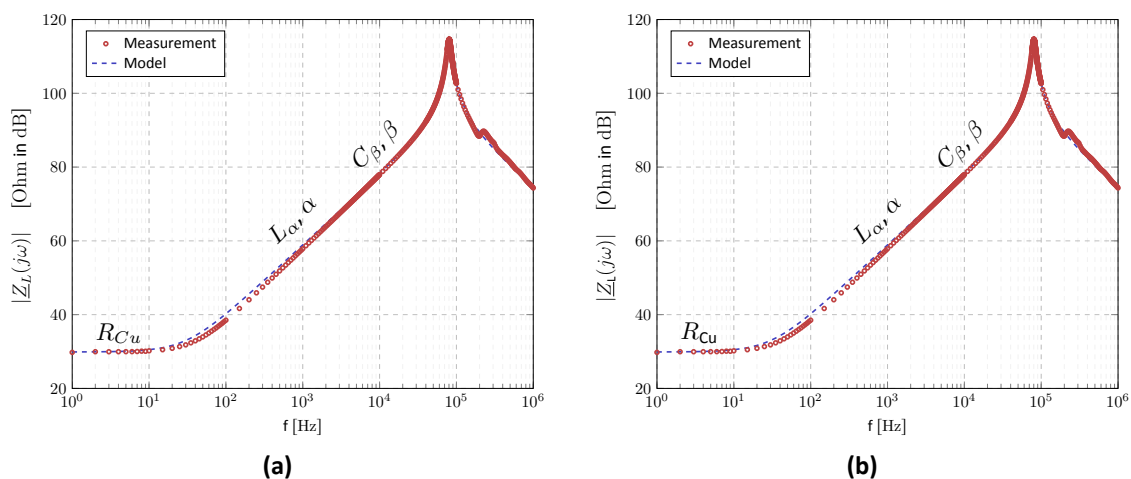


Abbildung 9: Vergleich der gemessenen-berechneten Impedanzen der Luftspule

(a) klassisches Modell

(b) fraktionales Modell.

Die geringe Abweichung zwischen den gemessenen und den aus den Parametern hochgerechneten Impedanzen der Luftspule zeigen, dass sowohl das klassische als auch das fraktionale Modell eine Luftspule gut darstellen kann.

Tabelle 1: Validierung der identifizierten Parameter für klassische und fraktionale Modelle der Luftspule

klassisches Modell (NRMSE = 1.5 %)			fraktionales Modell (NRMSE = 0.85 %)		
	identifiziert	gemessen		identifiziert	ermittelt
R_{Cu}	31.22 Ω	31.18 Ω	R_{Cu}	31.12 Ω	31.18 Ω
L	125.25 mH	124.2 mH	L_α	194.91 mH*	194.71 mH*
R_C	540.19 k Ω	nicht messbar	α	0.96197	
			β	0.96759	
C	31.33 pF	30.44 pF	C_β	50.73 pF*	50.31 pF*
f_0	80.34 kHz	80.35 kHz	f_0	80.36 kHz	80.35 kHz

5.2 Kupferkernspule

Wirbelstromverluste entsprechen dem Hauptteil der gesamten Kernverluste eines Kupferkernes. Anders als beim Eisenkern treten keine Hystereseverluste durch Magnetisierung und Entmagnetisierung des Kernes auf.

Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse der Parameteridentifikation für das klassische als auch für das fraktionale Modell der Kupferkernspule. Die berechnete Impedanz einer Kupferkernspule wurde mit Messungen verglichen. Zwischen dem klassischen und dem fraktionalen Modell sind keine Unterschiede zu erkennen. Deshalb wurde in Abb. 10 nur der Vergleich der Impedanzen des klassischen Modells mit den Messungen dargestellt. Es ist die durch Messungen identifizierte Resonanzfrequenz (die nächstgelegene Frequenz, bei der der Imaginärteil der Impedanz gleich Null ist) zu erkennen.

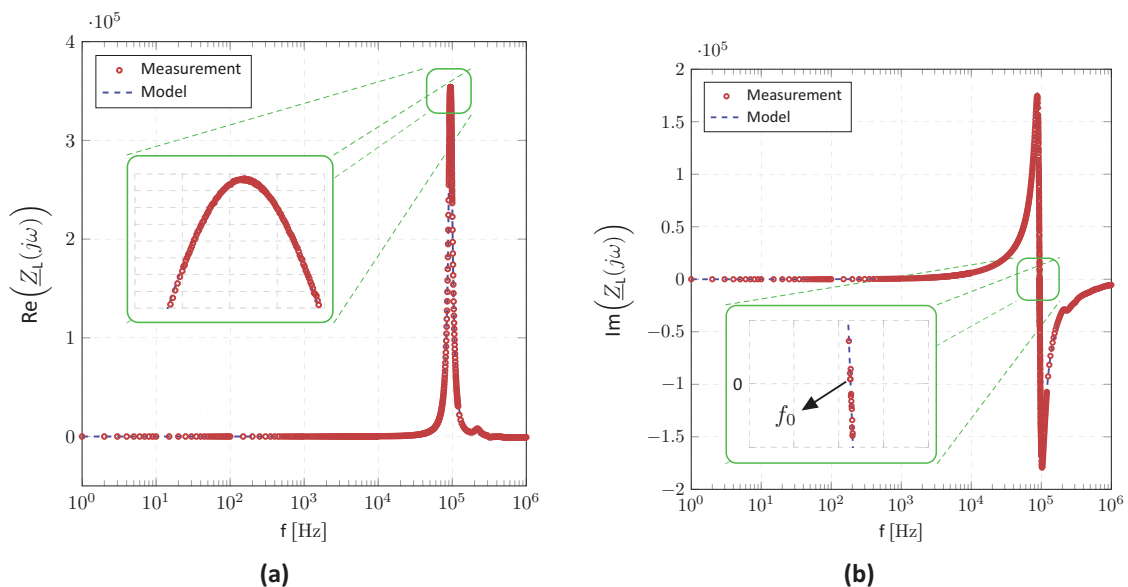


Abbildung 10: Vergleich der gemessenen-berechneten Impedanzen der Kupferkernspule

(a) Realteil

(b) Imaginärteil.

Vergleicht man die Ergebnisse der Luft- und Kupferkernspule, s. Tabelle 1 und 2, beobachtet

Tabelle 2: Validierung der identifizierten Parameter für klassische und fraktionale Modelle der Kupferkernspule

	klassisches Modell (NRMSE = 1.64 %)		fraktionales Modell (NRMSE = 1 %)	
	identifiziert	gemessen	identifiziert	ermittelt
R_{Cu}	31.27Ω	31.18Ω	R_{Cu}	30.81Ω 31.18Ω
L	96.92 mH	95 mH	L_{α}	193.35 mH^* 193.39 mH^*
R_C	$355.15 \text{ k}\Omega$	nicht messbar	α, β	0.96157 0.94246
C	29.25 pF	29.66 pF	C_{β}	52.39 pF^* 51.86 pF^*
f_0	94.52 kHz	94.53 kHz	f_0	94.53 kHz 94.53 kHz

man, dass sich infolge der Zunahme der Kernverluste die fraktionale Ordnung α leicht verringert hat. NRMSE zeigt, dass sowohl das klassische als auch das fraktionale Modell die Kupferkernspule gut abbilden können.

5.3 Eisenkernspule

Als Folge der zusätzlichen Hystereseverluste hat eine Eisenkernspule deutlich höhere Kernverluste als die Kupferkernspule. In Tabelle 3 sind die Ergebnisse der Parameteridentifikation dargestellt, die Impedanzen für das klassische als auch für das fraktionale Modell zeigt Abb. 11.

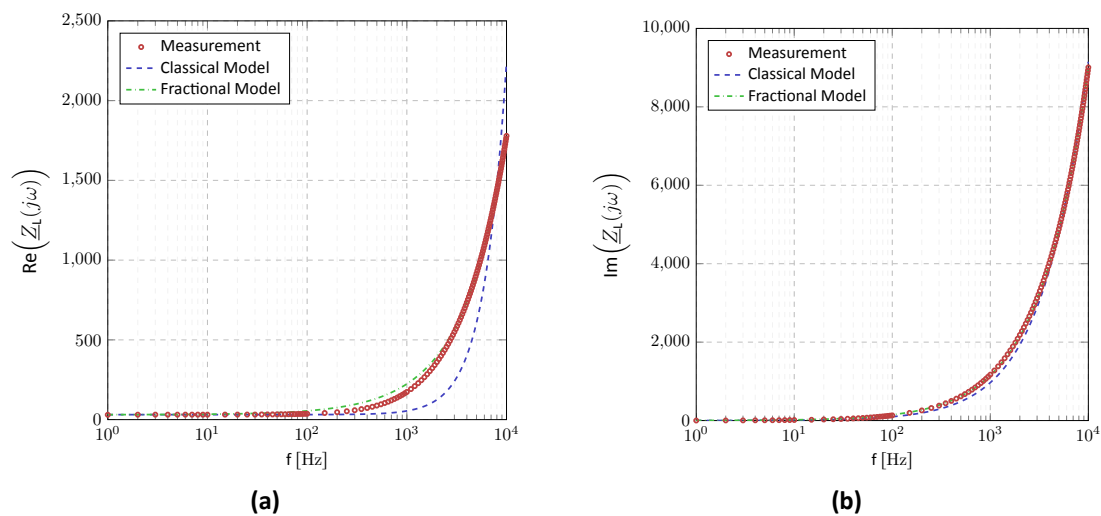


Abbildung 11: Vergleich der gemessenen-berechneten Impedanzen der Eisenkernspule

(a) Realteil

(b) Imaginärteil.

Aus den Ergebnissen erkennt man, dass sich die fraktionale Ordnung α im Vergleich zur Luftspule deutlich verringert hat. Hintergrund sind die hohen Kernverluste als Folge der zusätzlichen Hystereseverluste. An dem hohen relativen mittleren quadratischen Fehler (13,01 %) des klassischen Modells wird deutlich, dass dieses Modell die Eisenkernspule nicht gut genug repräsentiert und in diesem Fall das fraktionale Modell zu wählen ist.

Tabelle 3: Validierung der identifizierten Parameter für klassische und fraktionale Modelle der Eisenkernspule

klassisches Modell (NRMSE = 13.01 %)			fraktionales Modell (NRMSE = 1.45 %)	
	identifiziert	gemessen	identifiziert	ermittelt
R_{Cu}	31.27 Ω	31.18 Ω	R_{Cu}	30.79 Ω 31.18 Ω
L	154.12 mH	158 mH	L_α	458.66 mH* 465 mH*
R_C	40.09 k Ω	nicht messbar	$\alpha = 0.89705$	

Für alle untersuchten Spulen ist der relative mittlere quadratische Fehler NRMSE beim fraktionalen Modell kleiner als beim klassischen Modell. Das deutet darauf hin, dass diese Modellierung genauer die Realität widerspiegelt.

6 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde eine allgemeine Untersuchung zur Modellierung von technischen Spulen mit unterschiedlichen Kernmaterialien durchgeführt. Dabei wurden klassische und fraktionale Modelle miteinander verglichen, deren Parameter identifiziert und die Ergebnisse an Messungen validiert. Aufgrund der Tatsache, dass die Parameter des fraktionalen Modells nicht direkt gemessen werden können, wird eine mathematische Beziehung vorgestellt, die die Parameter von klassischen und fraktionalen Modellen einer technischen Spule auf der Grundlage von Zeitkonstanten verbindet. Das Verfahren wurde über ein breites Frequenzband hinweg für verschiedene Kernmaterialien einer Ringspule untersucht. Dabei zeigte sich, dass eine Eisenkernspule durch die Verwendung des fraktionalen Modells genauer dargestellt werden kann.

Literatur

- [1] I. Schäfer and K. Krüger, "Modelling of coils using fractional derivatives," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 307, no. 1, pp. 91–98, April 2006.
- [2] I. Schäfer and K. Krüger, "Modelling of lossy coils using fractional derivatives," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 41, no. 4, p. 045001, January 2008.
- [3] E. A. Gonzalez and I. Petráš, "Advances in fractional calculus: Control and signal processing applications," in *Carpathian Control Conference (ICCC), 2015 16th International*. IEEE, May 2015, pp. 147–152.
- [4] Y. F. Luchko, H. Matrínez, and J. J. Trujillo, "Fractional Fourier Transform and Some of its Applications," in *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 11, no. 4, October 2008, pp. 457–470.

- [5] K. Lunze, *Berechnung elektrischer Stromkreise*, 10th ed. VEB Verlag Technik Berlin, May 1990, pages: 308.
- [6] G.-A. J. Francisco, R.-G. Juan, G.-C. Manuel, and R.-H. J. Roberto, "Fractional RC and LC Electrical Circuit," *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, vol. 15, no. 2, pp. 311–319, April-June 2014.